PF1 – Contrôle n°4

4 décembre 2013

Durée : 40 minutes

Exercice 1. Rappelez ce qu'est un système de connecteurs complet et donnez un exemple d'un tel système.

Réponse. *Un système de connecteur S est complet si pour tout n, pour toute fonctionf de $\{V,F\}^n \to \{V,F\}$, il existe une formule n'utilisant que des connecteurs dans S qui exprime f. Par exemple, $\{\wedge,\vee,\neg\}$ est complet (la DNF n'utilise que ces connecteurs !).*

Exercice 2. Vous pouvez compter sur vos doigts ... si vous en avez assez !

1. Combien y a-t-il de fonctions de $\{V,F\}^n$ dans $\{V,F\}$ qui prennent la valeur V exactement $n-1$ fois ?

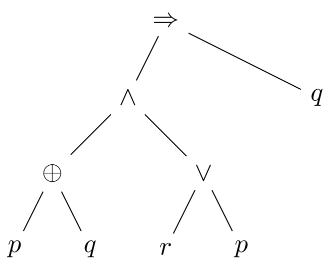
   Réponse. *Il faut fixer la valeur de $n-1$ éléments à V et les autres à F. Il suffit donc de choisir ces $n-1$ éléments parmi les 2^n possibles. Il y a donc $\binom{2^n}{n-1}$ fonctions qui valent exactement $n-1$ fois V.*

2. Combien y a-t-il de fonctions de $\{V,F\}^5$ dans $\{V,F\}$ qui prennent la valeur F exactement 3 fois ?

   Réponse. *Idem, on en choisit 3 parmi les 2^5 possibles. On a $\binom{32}{3}$ fonctions qui prennent exactement 3 fois la valeur F.*

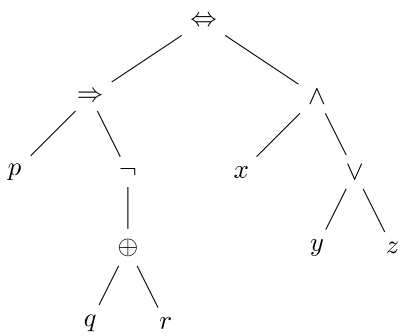
Exercice 3. Pour chacune des formules logiques ci-dessous, donnée en écriture infixée (l'écriture habituelle), donnez son arbre, son écriture postfixée et son écriture préfixée.

1. $((p \oplus q) \wedge (r \vee p)) \Rightarrow q$

   Réponse.
   En préfixée : $\Rightarrow \wedge \oplus pq \vee rpq$
   En postfixée : $pq \oplus rp \vee \wedge q \Rightarrow$

2. $(p \Rightarrow \neg(q \oplus r)) \Leftrightarrow (x \wedge (y \vee z))$



Réponse.
En préfixée : $\Leftrightarrow \Rightarrow p \neg \oplus qr \wedge x \vee yz$
En postfixée : $pqr \oplus \neg \Rightarrow xyz \vee \wedge \Leftrightarrow$

Exercice 4.

1. Écrivez la table de vérité et donnez une CNF ou une DNF (en précisant celle que vous avez choisie) de la formule suivante $(p \Rightarrow (r \vee \neg q)) \Rightarrow p$

   Réponse.

p	q	r	$(p \Rightarrow (r \vee \neg q)) \Rightarrow p$
F	F	F	F
F	F	V	F
F	V	F	F
F	V	V	F
V	F	F	V
V	F	V	V
V	V	F	V
V	V	V	V

   En faisant un peu attention, on pouvait se rendre compte que cette formule était équivalent à p. Sinon, on peut toujours donner la DNF à partir des mintermes :

$$(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

2. On appelle MOD_2 le connecteur ternaire qui étant donné $p, q, r \in \{F, V\}^3$ vaut V si le nombre de variables valant V est pair et F sinon. Écrire la table de vérité de $MOD_2(p, q, r)$ et donnez-en une CNF.

   Réponse. *On rappelle que* $0 = 2 \times 0$ *est pair !*

p	q	r	$MOD_2(p, q, r)$
F	F	F	V
F	F	V	F
F	V	F	F
F	V	V	V
V	F	F	F
V	F	V	V
V	V	F	V
V	V	V	F

   On donne alors la CNF :

$$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$$

Exercice 5. Donnez la valeur en complément à deux et en décimal de `z` dans les programmes java suivants :

1.
```
byte x = 5;
byte y = -3;
byte z = x^y;
```

Réponse. *En complément à deux sur* 8 *bits,* x *est représenté par* 0000 0101 *et* y *par* 1111 1101. *Donc* z *est représenté par le xor bit à bit de ces deux représentations, soit* 1111 1000. *Pour trouver la valeur décimal de* z*, on enlève* 1*, on inverse les bits et on trouve la représentation binaire de* $-z$ *qu'on convertit en base* 10. *Soit :* $z = -(0000\ 1000)_2 = -8$.

2.

```
byte x = 100;
byte z = x << 2;
```

Réponse. *La représentation en complément à deux sur* 8 *bits de* x *est* 0110 0100 *donc celle de* z *est* 1001 0000 *soit* $z = -(0111\ 0000)_2 = -112$.