

Applications linéaires et matrices

Florent Capelli

21/09/2026

1 Applications linéaires

Définition 1.1. Soit V et W deux espaces vectoriels. Une application $f: V \rightarrow W$ est dite linéaire si pour tout $u, v \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$.

En particulier, en prenant $v = 0$ dans la définition ci-dessus, on a $f(\lambda u) = \lambda f(u)$. En prenant $\lambda = 1$, on trouve $f(u + v) = f(u) + f(v)$.

Exemple 1.1. La fonction $f: (x, y, z) \mapsto (x + 2y + 3z, x + y + z)$ est linéaire. Cependant, la fonction $g: (x, y) \mapsto 2x + 3y + 2$ n'est pas linéaire. En effet $g(1, 1) = 7$ et $g(2, 2) = 12 \neq 2 \times g(1, 1)$.

On peut voir facilement que si f est linéaire, $f(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(v_i)$. Maintenant, si V est de dimension finie et que $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ est une base de V , alors f est complètement déterminée par $w_1 = f(b_1), \dots, w_n = f(b_n)$ où $w_i \in W$. En effet, comme vu précédemment, tout vecteur de V s'écrit de façon unique comme $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ et donc $f(v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i$ par linéarité.

Exemple 1.2. Considérons la fonction f de l'exemple 1.1 et la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a : $f(1, 0, 0) = (1, 1)$, $f(0, 1, 0) = (2, 1)$ et $f(0, 0, 1) = (3, 1)$. On peut alors évaluer à partir ces valeurs : $f(x, y, z) = x \cdot f(1, 0, 0) + y \cdot f(0, 1, 0) + z \cdot f(0, 0, 1)$. On retrouve alors $f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, x + y + z)$.

2 Matrice d'une application linéaire

Soit maintenant $A = \{a_1, \dots, a_p\}$ une base de W . On note $(m_{1,i}, \dots, m_{p,i})$ les coordonnées de $f(b_i)$ dans la base A . On peut alors représenter f complètement sous la forme suivante d'une matrice $p \times n$ ainsi :

$$M(f, B, A) := \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{p,1} & \dots & m_{p,n} \end{pmatrix}$$

On dit que $M(f, B, A)$ est la matrice de f dans les bases B et A . Par exemple, la matrice de la fonction linéaire de l'exemple 1.1 dans les bases canoniques de

$\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si maintenant on a vecteur $v \in V$ donné par ses coordonnées $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dans la base B , on peut calculer $f(v)$ en effectuant la multiplication de la matrice $M(f, B, A)$ par le vecteur colonne $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^t$, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{p,1} & \dots & m_{p,n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \alpha_i m_{1,i} \\ \dots \\ \sum_{i=p}^n \alpha_i m_{p,i} \end{pmatrix}$$

Une matrice $n \times p$ peut donc être vue comme la représentation d'une fonction linéaire d'un espace de dimension n vers un espace de dimension m . Cela permet de voir des relations non évidente entre des matrices : deux matrices peuvent représenter la même fonction linéaire dans des bases différentes. En choisissant bien les bases, on pourra trouver des représentations plus simple d'une même application linéaire.

Si on additionne deux matrices M_1, M_2 qui représentent respectivement les applications linéaire f et g dans les bases B et A , on peut voir que cela donne la représentation de l'application linéaire de $f + g$ dans les bases B et A .

On rappelle que le produit $M_1 \times M_2$ de deux matrices M_1 et M_2 de dimensions respectives $n \times p$ et $p \times m$ est une matrice M de dimension $n \times m$ telle que $M[i, j] = \sum_{k=1}^p M_1[i, k] M_2[k, j]$. On peut alors voir facilement que le produit matriciel correspond à la composition de fonctions linéaires : $M(f, B, A) \times M(g, A, C) = M(f \circ g, B, C)$.

Exercice 2.1. *Prouvez que si $f: V \rightarrow W$ et $g: W \rightarrow U$ sont toutes les deux linéaires alors $f \circ g$ est aussi linéaire. Prouvez alors que $M(f \circ g, B, C) = M(f, B, A) \times M(g, A, C)$ pour des B, A, C des bases de V, W, U respectivement.*

Soit $f: V \rightarrow V$ la fonction dite *identité* définie par $f(v) = v$ pour tout $v \in V$. On observe que $M(f, B, B) = I_n$ pour toute base B de V , où I_n est la matrice identité, c'est-à-dire la matrice $n \times n$ qui vaut 0 partout sauf sur sa diagonale où elle vaut 1. On vérifie aisément que $M \times I_n = I_n \times M = M$.

2.1 Kernel et Rang

Pour une application linéaire $f: V \rightarrow W$, on définit $\text{Ker}(f)$ comme l'ensemble des vecteurs $v \in V$ tels que $f(v) = 0$. On remarque facilement que $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de V . En effet, il est stable par addition puisque si $u, v \in V$, $f(u + v) = f(u) + f(v) = 0 + 0 = 0$ et par multiplication car $f(\lambda u) = \lambda f(u) = 0$. Ainsi, si V est de dimension fini, on sait que $\text{Ker}(f)$ est aussi de dimension fini.

De même, on note $\text{Im}(f)$ l'ensemble des vecteurs w de W tels que $w = f(v)$ pour un certain v de V . On voit de même que $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de W . En effet, si $w_1, w_2 \in \text{Im}(f)$ alors par définition, il existe $v_1, v_2 \in V$ tels que $w_1 = f(v_1)$ et $w_2 = f(v_2)$. Alors $w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2)$ est donc bien un vecteur de $\text{Im}(f)$. De même $\lambda w_1 = f(\lambda v_1)$ est un vecteur de $\text{Im}(f)$. On observe que si V est de dimension finie alors $\text{Im}(f)$ est aussi de dimension finie. En effet, si $B = (b_1, \dots, b_n)$ est une base de V alors $f(B) = \{f(b_1), \dots, f(b_n)\}$ est clairement une famille génératrice de $\text{Im}(f)$ puisque si $w \in \text{Im}(f)$ alors $w = f(\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(b_i)$.

Un théorème central de l'algèbre linéaire est le suivant :

Théorème 2.1. *Si $f: V \rightarrow W$ est une application linéaire et V est de dimension finie, alors $\dim(V) = \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Ker}(f))$.*

Voici une idée de la preuve de ce théorème. Soit $A = (a_1, \dots, a_k)$ une base de $\text{Im}(f)$ (nous avons établi plus haut que c'était bien un espace vectoriel de dimension finie) et $B = (b_1, \dots, b_p)$ une base de $\text{Ker}(f)$. Par définition, il existe $v_1, \dots, v_k$ tels que $a_i = f(v_i)$ pour tout $i \leq k$. Nous affirons que $C = (v_1, \dots, v_k, b_1, \dots, b_p)$ est une base de V . En effet, cette famille est libre. En effet, supposons qu'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}, \beta_1, \dots, \beta_p$ tels que $\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^p \beta_i b_i = 0$. Alors en appliquant f et la linéarité, on a $\sum_{i=1}^k \alpha_i a_i = 0$. Comme A est libre, cela veut dire que $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$. On a donc $\sum_{i=1}^p \beta_i b_i = 0$. Mais comme B est libre aussi, on a $\beta_1 = \dots = \beta_p = 0$. Donc C est libre. Il reste à montrer que C est génératrice, c'est-à-dire que tout vecteur $v \in V$ s'écrit comme une combinaison linéaire de C . Pour cela, on choisit $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tels que $f(v) = \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i$. Ces valeurs existent puisque $f(v) \in \text{Im}(f)$ et que A est une base de $\text{Im}(f)$. Soit $v' = v - \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i$. On voit facilement par linéarité que $f(v') = 0$ donc $v' \in \text{Ker}(f)$. Ainsi v' peut s'écrire sous la forme $\sum_{i=1}^p \beta_i b_i$. Donc $v = \sum_{i=1}^p \beta_i b_i + \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i$. C est donc génératrice, c'est une base.

Les bases C et A sont intéressantes. Complétons A en une base arbitraire A' de W . On peut voir que $M(f, C, A')$ a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où r est la dimension de $\text{Im}(f)$. On appelle cette forme la *forme échelonnée*. Le théorème précédent inspire la définition suivante :

Définition 2.2. *Le rang $\text{rang}(f)$ d'une application linéaire est définie comme la dimension de $\text{Im}(f)$. On parle aussi du rang $\text{rang}(M)$ d'une matrice M de dimensions $n \times m$ comme le rang de la dimension de l'application linéaire représentée par M dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$.*

On peut vérifier que $\text{rang}(AB) \leq \min(\text{rang}(A), \text{rang}(B))$. Aussi, on peut voir que le rang d'une matrice est la dimension de l'espace vectoriel engendré par

ses colonnes. Mais aussi, alternativement, la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses lignes.

L'observation précédente nous indique qu'on peut toujours changer les bases pour réécrire M sous une forme très précise. Cette forme-là peut d'ailleurs nous servir à calculer le rang d'une matrice en utilisant un algorithme très célèbre : le pivot de Gauss.

2.2 Calcul du rang: le pivot de Gauss

Étant donné une matrice, on considère les transformations de matrices suivantes :

- Échanger deux lignes ou deux colonnes.
- Multiplier une ligne ou une colonne par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ non nul.
- Ajouter la colonne (ou ligne) i multipliée par $\lambda \in \mathbb{R}$ à la colonne (ou ligne) j .

On peut voir ces transformations ne changent pas le rang de la matrice. On peut les voir comme des manipulations sur les bases utilisées pour représenter f . On peut se ramener sous une forme échelonnée avec l'algorithme suivant :

- On échange des lignes et des colonnes pour avoir un coefficient α non nul en haut à gauche.
- On multiplie la première colonne par $1/\alpha$ pour avoir un 1 en haut à gauche.
- En ajoutant la colonne 1 multiplié par $-m_{1,i}$ à la colonne i , on fait en sorte que la première ligne de la matrice soit de la forme $10 \dots 0$. On fait pareil avec les lignes pour que la première colonne de la matrice soit $(10 \dots 0)^T$.
- On recommence récursivement sur la sous-matrice obtenu en enlevant la première colonne et la première ligne.

Exemple 2.1. Considérer $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 11 & 4 \end{pmatrix}$

2.3 Matrices et application inversibles

Soit $f: V \rightarrow V$ une application linéaire. On dit que f est inversible s'il existe $g: V \rightarrow V$ tel que $f \circ g = Id$. On peut vérifier que dans ce cas, g est aussi linéaire. On note alors $g = f^{-1}$.

On peut de même parler de l'inverse d'une matrice $n \times n$. Une matrice M est inversible s'il existe une matrice N telle que $MN = I_n$. On note alors M^{-1} . Remarquons que si A et B sont deux matrices inversibles alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Théorème 2.3. En dimension n finie, f est inversible si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0\}$. Alternativement, si et seulement si $\text{rang}(f) = n$.

Le pivot de Gauss donne une méthode pour calculer l'inverse d'une matrice. Dans le cas où une matrice est inversible, on peut déjà voir qu'on a besoin d'agir seulement sur les lignes (ou dualement, seulement sur les colonnes). En effet, si la première colonne ne contient que des 0, alors la matrice n'est pas inversible. Sinon, on a une ligne dont la première valeur n'est pas 0. On l'échange pour qu'elle soit la première et on l'utilise pour transformer la première colonne en $(10 \dots 0)^T$. On procède de même pour la deuxième colonne. Comme la matrice est inversible, on a forcément une ligne où la deuxième valeur est non nul. On la met en deuxième position et on fait de même pour avoir la deuxième colonne à $(010 \dots 0)$. On continue jusqu'à trouver I_n .

Chacune des opérations précédente peut se voir comme une multiplication à gauche par une matrice. En d'autre mot, si on obtient I_n après avoir effectué des opérations du pivot sur M , on a trouvé des matrices $A_1, \dots, A_k$ telles que $A_1 \times \dots \times A_k \times M = I_n$. En multipliant par M^{-1} de chaque côté, on trouve : $M^{-1} = A_1 \times \dots \times A_k = A_1 \times \dots \times A_k \times I_n$. En d'autres mots, on peut obtenir M^{-1} en faisant les mêmes opérations que sur M mais en démarrant avec I_n .

Exemple 2.2. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$