

Produits scalaires

Florent Capelli

21/09/2026

1 Produit scalaire

Un produit scalaire est une fonction $|\cdot| : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$:

- Bilinéaire : $(\alpha u + v)|w = \alpha(u|w) + (v|w)$ et $w|(\alpha u + v) = \alpha(w|u) + (w|v)$.
- Symétrique : $(u|v) = (v|u)$.
- Définie : $(u|u) = 0$ si et seulement si $u = 0$.
- Positive : $(u|u) \geq 0$.

Exemple 1.1. Sur $\mathbb{R}^n$: $(u|v) = \sum_{i=1}^n u_i v_i$. On peut vérifier les propriétés ci-dessus. On appelle ce produit le produit scalaire canonique (ce n'est pas le seul produit scalaire qu'on peut définir sur $\mathbb{R}^n$. On le notera $\cdot$).

Par exemple $(1, 2, 3) \cdot (2, 3, 5) = 2 + 6 + 15 = 23$.

Si $b_1, \dots, b_n$ est une base et $u = \sum_{i=1}^n u_i b_i$ et $v = \sum_{i=1}^n v_i b_i$ alors en utilisant la bilinéarité, on a $(u|v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j (b_i|b_j)$.

On peut donc toujours écrire un produit scalaire sous forme matricielle. On peut considérer la matrice de Gram $M[i, j] = (b_i|b_j)$. On a alors $(u|v) = u^T \times M \times v$. On remarque que M est symétrique et positive.

On suppose désormais que l'espace est muni d'un produit scalaire. On parle, dans ce cas, d'un espace préhilbertien.

Exemple 1.2. Sur l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$, on peut définir $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ et vérifier que c'est un produit scalaire.

2 Norme

Intuitivement, une norme permet de mesurer la taille des vecteurs. Une norme est une fonction N de V dans $\mathbb{R}_+$ telle que :

- **Homogénéité** : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in V$, $N(\lambda u) = |\lambda|N(u)$.
- **Séparation** : pour tout $u \in V$, $N(u) = 0$ implique que $u = 0$.
- **Sous-additive** : $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

On peut aussi définir une distance associée par $d_N(x, y) = N(x - y)$. On a bien $d_N(x, y) = d_N(y, x)$, $d_N(x, y) > 0$ et $d_N(x, y) \leq d_N(x, z) + d_N(z, y)$ (inégalité triangulaire).

1. La norme infinie $\|u\|_\infty$ est définie par $\max_{i=1, \dots, n} |u_i|$.
2. La norme 1 $\|u\|_1$ est définie par $\sum_{i=1, \dots, n} |u_i|$.
3. La norme Euclidienne $\|u\|_2$ (aussi connue sous le nom de norme 2) est définie par $\sqrt{\sum_{i=1}^n |u_i|^2}$.
4. La norme $p \geq 1$ en générale est égale à $(\sum_{i=1}^n |u_i|^p)^{\frac{1}{p}}$.

On remarque que la norme Euclidienne peut être définie par $u \cdot u$. Ce n'est pas un hasard :

Théorème 2.1. *Pour tout produit scalaire, la fonction $u \mapsto \sqrt{(u|u)}$ est une norme.*

En dimension finie, toutes les normes se valent :

Théorème 2.2. *Si V est de dimension finie n et N_1, N_2 sont deux normes sur V , alors il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que pour tout $u \in V$, $\alpha N_2(u) \leq N_1(u) \leq \beta N_2(u)$.*

L'inégalité de Cauchy-Schwartz est très utile en géométrie, statistique et théorie de l'information. Elle dit la chose suivante :

Théorème 2.3. *Pour tous vecteurs $u, v \in V$, on a $(u|v)^2 \leq (u|u)(v|v)$.*

De façon équivalente, $|(u|v)| \leq \|u\| \times \|v\|$ où $\|\cdot\|$ est la norme induite par $(\cdot|\cdot)$. Elle permet notamment de prouver la sous-additivité de $\|\cdot\|$. En effet:

$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2(u|v) + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$, l'inégalité étant une application de Cauchy-Schwartz.

Une preuve de Cauchy-Schwartz: on regarde $(z|z)$ où $z = u - \frac{(u|v)}{(v|v)}v$. On vérifie par le calcul que

$$\begin{aligned} (z|z) &= (u|u) - 2\frac{(u|v)}{(v|v)}(u|v) + (v|v)\frac{(u|v)^2}{(v|v)^2} \\ &= (u|u) - \frac{(u|v)^2}{(v|v)} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

C'est une valeur positive donc $(u|u)(v|v) \geq (u|v)^2$.

3 Orthogonalité

Un produit scalaire permet de définir une notion d'orthogonalité. On dit que u est *orthogonal* à v lorsque $(u|v) = 0$. On note alors $u \perp v$. Dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$,

la notion d'orthogonalité induite par le produit scalaire canonique est bien la notion usuelle d'orthogonalité.

Exemple 3.1. Les vecteurs $(1, 2)$ et $(-2, 1)$ sont orthogonaux (pour le produit scalaire canonique). De façon générale, si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors $(-y, x)$ est un vecteur orthogonal à (x, y) .

On peut retrouver Pythagore !

Théorème 3.1. Si $u \perp v$, alors $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

Démonstration. En effet, $(u + v|u + v) = (u|u) + 2(u|v) + (v|v) = (u|u) + (v|v)$ puisque $(u|v) = 0$.

□

Une notion intéressante dans de nombreuses applications est la notion de famille orthogonale. Une famille de vecteurs non nuls $e_1, \dots, e_k$ est orthogonale si et seulement si $(e_i|e_j) = 0$ pour tout $i \neq j$. On a :

Théorème 3.2. Toute famille orthogonale est libre.

Démonstration. En effet, si $z = \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i = 0$ alors $(z|e_j) = \sum_{i=1}^k \alpha_i (e_i|e_j) = 0$. Comme e_j est non nul par définition, on en déduit que $\alpha_j = 0$. Puisqu'on peut faire cette manipulation pour tout j , alors $\alpha_j = 0$ pour tout j . Comme e_j est non nul par définition, on en déduit que $\alpha_j = 0$. Puisqu'on peut faire cette manipulation pour tout j , alors $\alpha_j = 0$.

□

Étant donné un sous-espace vectoriel $E \subseteq V$, on note $E^\perp$ l'ensemble des vecteurs qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de E . On a :

Théorème 3.3. Pour tout sous-espace vectoriel $E \subseteq V$, E et $E^\perp$ sont en somme directe.

Démonstration. Si $u \in E \cap E^\perp$ alors $(u|u) = 0$ donc $u = 0$.

Si $u = e + e' = f + f'$ avec $e, f \in E$ et $e', f' \in E^\perp$. On a $(u|e) = (f|e) + (f'|e) = (f|e)$. On a aussi $(u|e) = (e|e)$. De même, $(u|f) = (f|e) = (f|f)$. Donc $(e - f|e - f) = (e|e) + (f|f) - 2(e|f) = 0$ puisque toutes ces quantités sont égales. On en déduit $e - f = 0$ soit $e = f$. On prouve de même que $e' = f'$.

□

On peut définir le projeté orthogonal de v sur u par $p(v; u) = \frac{(u|v)}{(u|u)}u$. On a dans ce cas $v - p(v; u) \perp u$. En effet, $(v - p(v; u)|u) = (v|u) - (v|u)\frac{(u|u)}{(u|u)} = 0$.

Cela permet de prouver le résultat suivant, connu sous le nom d'algorithme de Gram-Schmidt.

Théorème 3.4. *Pour toute famille libre $(u_1, \dots, u_k)$, il existe une famille orthonormale $(v_1, \dots, v_k)$ telle que $\text{vec}(v_1, \dots, v_i) = \text{vec}(u_1, \dots, u_i)$ pour tout i .*

Démonstration. Par induction sur i . On pose $v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$ et on a le résultat pour $i = 1$.

Sinon, on pose $w_{i+1} = u_{i+1} - \sum_{j=1}^i (u_{i+1}|v_j)v_j$ et $v_{i+1} = \frac{w_{i+1}}{\|w_{i+1}\|}$.

□

On peut utiliser une idée similaire pour montrer :

Théorème 3.5. *Si V est de dimension finie et $E \subseteq V$ un sous-espace vectoriel de V , alors $E \oplus E^\perp = V$.*

Démonstration. Soit $(b_1, \dots, b_k)$ une base orthonormale de E et $u \in V$. On note $u_1 = \sum_{i=1}^k (u|b_i)b_i$ et $u_2 = u - u_1$. Alors on peut facilement voir que $u_2 \perp b_i$ pour tout i donc $u_2 \in E^\perp$. De plus $u_1 \in E$ par définition. On a donc $u = u_1 + u_2 \in E + E^\perp$.

□

Une conséquence de cela est que si on prend une famille libre de $n - 1$ vecteurs d'un espace de dimension n , alors l'espace orthogonal est de la forme αe pour un certain vecteur e . Cela généralise l'intuition que l'on a dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^3$.