Fonctions à plusieurs variables. Optimisation sous contraintes

Florent Capelli

02/11/2026

1 Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$

On considère désormais des fonctions de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Si $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, alors on peut voir chacune de ses composantes comme une fonction f_i de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, c'est-à-dire $f = (f_1, \dots, f_m)$.

On généralise facilement de limite puisqu'on a une notion de normes sur $\mathbb{R}^m$: la limite de $f(x)$ quand x tend vers $a \in \mathbb{R}^n$ est $\ell \in \mathbb{R}^m$ si et seulement pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $b \in \mathbb{R}^n$, si $\|b - a\|_2 < \eta$, alors $\|f(b) - \ell\|_2 < \epsilon$.

On définie la continuité comme d'habitude : une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est continue en a si la limite de f en a est $f(a)$.

On utilise la notion de différentiabilité comme vu au-dessus : f est différentiable en a si il existe une fonction linéaire $df(a)$ telle que $f(a+h) - f(a) - df(a)(h) = o(\|h\|_2)$. On peut reprendre la preuve du cas $m = 1$ pour montrer que si une telle fonction linéaire existe alors elle est unique et c'est pour cela que nous avons pris la liberté de la noter $df(a)$ directement. On appelle alors $df(a)$ la différentielle de f en a.

Comme $df(a)$ est une fonction linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, on peut l'écrire comme une matrice $m \times n$ dans la base canonique. De plus, en écrivant f comme $(f_1, \dots, f_m)$, on voit facilement que si $df(a)$ existe, sa $i$ème composante doit être $df_i(a)$. Donc $df(a)$ peut s'écrire (dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$) comme la matrice dont les lignes sont $df_1(a), \dots, df_m(a)$. On appelle cette matrice **la matrice jacobienne de** f et on la note $\nabla f(a)$.

On peut écrire $\nabla f(a)$ comme $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) \dots \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) \dots \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$.

Comme précédemment, l'existence d'une matrice Jacobienne ne garantit pas l'existence d'une différentielle. Cependant, le théorème précédent est toujours

vrai : la continuité de la matrice jacobienne est équivalente au fait que f soit continuement différentiable.

Dans le cas de fonctions continuement différentiables, on peut alors calculer les jacobiens de façon systématique :

- Si f, g sont continuement différentiables en a, alors $\nabla(f+g)(a) = \nabla f(a) + \nabla g(a)$.
- Si $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ est continuement différentiable en $g(a)$ et $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ est continuement différentiable en a, on a $\nabla(f \circ g)(a) = \nabla f(g(a)) \times \nabla g(a)$ où pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $(f \circ g)(x) = f(g_1(x), \ldots, g_k(x))$.
- Si $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ est une fonction linéaire $x \mapsto Ax$, alors $\nabla f = A$.

Exemple 1.1. 1. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $\begin{pmatrix} 2x+3y \\ x+y \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

On a $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$.