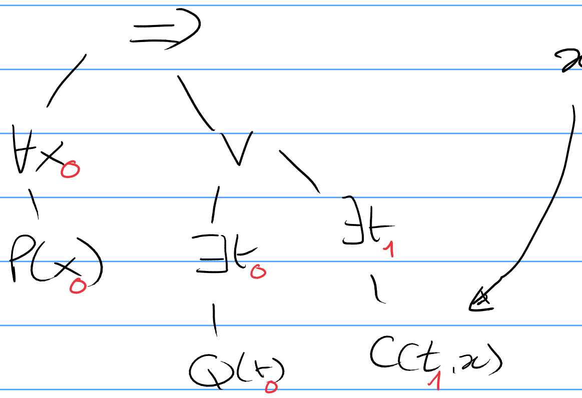
TP3 Systèmes de preuves

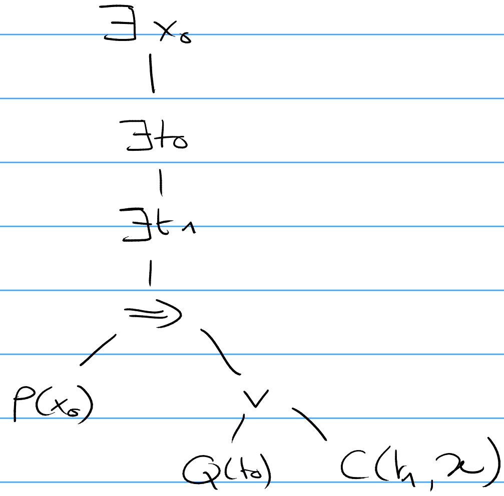
Ex 1 :

1.

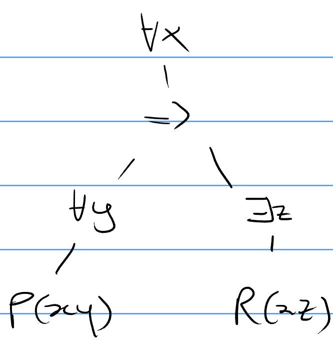


x est libre

on renomme

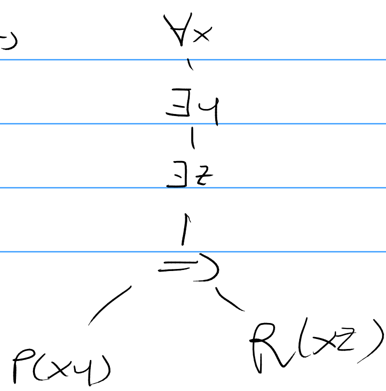


2.

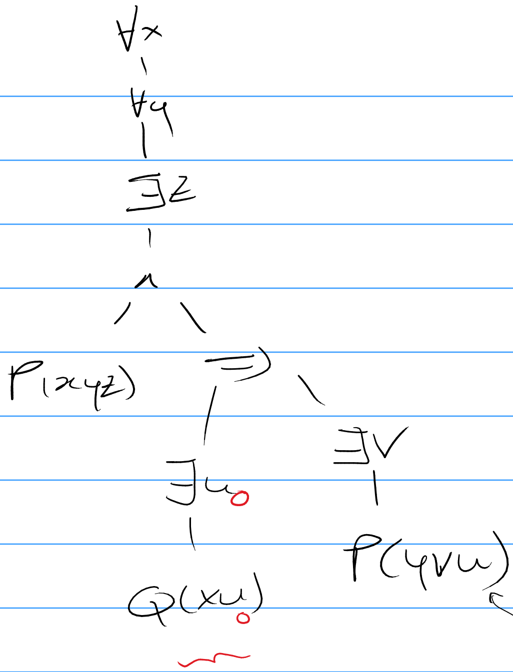


- Pas de variables libres
- Pas de risque de capture.

⇝

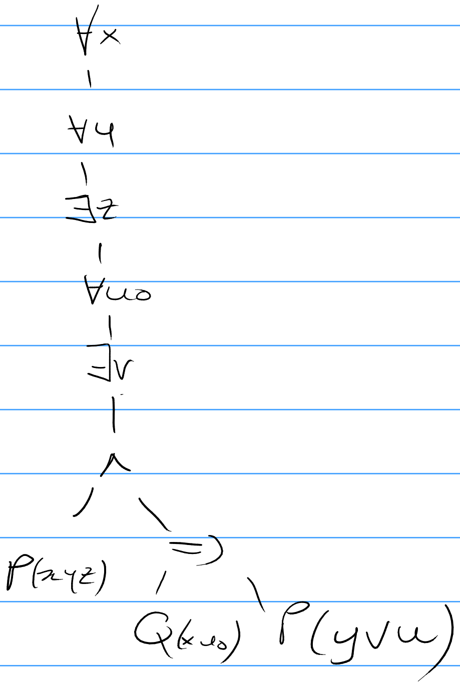


3.

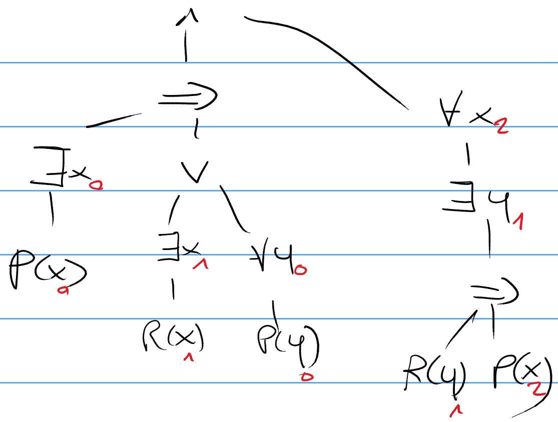


u est libre

⚠ capture.

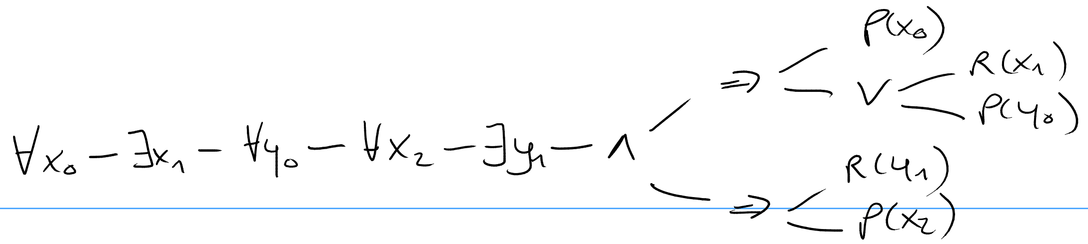


4.



. Pas de variables libres

. ⚠ Capture



Exercice 2 :

1. On introduit trois constantes dans le langage $c_0\, c_1 c_2$

et on a la formule

$$P(c_0) \Rightarrow \left(Q(c_1) \vee C(c_2, x)\right).$$

2. On introduit deux symboles de fonctions unaires f_y et f_z

et on a :

$$\forall x \quad P(x, f_y(x)) \Rightarrow R(x, f_z(x)).$$

3. On introduit $f_z(\cdot,\cdot)$ $\quad f_v(\cdot,\cdot,\cdot)$

$$\forall x \forall y \forall u_0 \; P(x,y,f_z(x,y)) \wedge Q(x,u_0) \Rightarrow P(y, f_v(x y u_0), u)$$

Rq pour +2 fun !

Techniquement, on peut remarquer que v ne dépend pas vraiment d'u_0 (on aurait pu inverser $\forall u_0 \exists v$ en $\exists v \forall u_0$)

donc on pourrait prendre $f_v(\cdot,\cdot)$.

4. On introduit
- $f_{x_1}(\cdot)$
- $f_{y_1}(\cdots)$

$$\forall x_0 \forall y_0 \forall x_2 \left[P(x_0) \Rightarrow \left(R(f_{x_1}(x_0)) \vee P(y_0)\right)\right] \wedge \left[R(f_{y_1}(x_0, y_0, x_2)) \Rightarrow P(x_2)\right]$$

Même remarque :) .

Exercice 3.

1.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \vdash P}\ \text{axiome}}{\vdash \neg P, P}\ \neg\ \text{droit}}{\vdash \neg P \vee P}\ \vee\ \text{droit}$$

2.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \vdash P}\ \text{Ax}}{\neg P, P \vdash \forall y Q(y)}\ \neg\ \text{gauche} + \text{Affaiblissement droit}}{\neg P \wedge P \vdash \forall y Q(y)}\ \wedge\ \text{gauche}}{\vdash (\neg P \wedge P) \Rightarrow \forall y Q(y)}\ \Rightarrow\ \text{droit}$$

3.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \vdash P}\ \text{Ax}}{\vdash P, \neg P}\ \neg\ \text{droit}}{\neg\neg P \vdash P}\ \neg\ \text{gauche}}{\vdash \neg\neg P \Rightarrow P}\ \Rightarrow\ \text{droit} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \vdash P}\ \text{Ax}}{P, \neg P \vdash}\ \neg\ \text{gauche}}{P \vdash \neg\neg P}\ \neg\ \text{droit}}{\vdash P \Rightarrow \neg\neg P}\ \Rightarrow\ \text{droit}}{\vdash \neg\neg P \Rightarrow P \wedge P \Rightarrow \neg\neg P}\ \wedge\ \text{droit}$$

4

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P(y) \vdash P(y)}\ \text{axiomes}}{P(y) \vdash \exists x P(x)}\ \exists\ \text{droit avec } [x/y]}{\forall x P(x) \vdash \exists x P(x)}\ \forall\ \text{gauche avec } [x/y]}{\vdash \forall x P(x) \Rightarrow \exists x P(x)}\ \Rightarrow\ \text{droit}$$

5.

$$P(x) \vdash P(x) \quad \text{axiome}$$

$$P(x), \neg P(x) \vdash \quad \neg\ \text{gauche}$$

$$P(x), \forall x \neg P(x) \vdash \quad \forall\ \text{gauche avec } [x/x]$$

$$P(x) \vdash \neg \forall x \neg P(x) \quad \neg\ \text{droit}$$

$$\exists x P(x) \vdash \neg \forall x \neg P(x) \quad \exists\ \text{gauche}$$

$$\vdash \exists x P(x) \Rightarrow \neg \forall x \neg P(x) \quad \Rightarrow\ \text{droit}$$

6.

$$R(z) \vdash R(z) \quad \text{ax}$$

$$\vdash R(z), \neg R(z) \quad \neg\ \text{droit}$$

$$\vdash R(z), \exists z \neg R(z) \quad \exists\ \text{droit } [z/z]$$

$$\vdash \forall z R(z), \exists z \neg R(z) \quad \forall\ \text{droit}$$

$$\vdash \forall z R(z) \vee \exists z \neg R(z) \quad \vee\ \text{droit}$$

$$R(y) \vdash R(y) \quad \text{ax}$$

$$R(y), R(x) \vdash R(y)$$

$$R(y) \vdash R(x) \Rightarrow R(y) \quad \Rightarrow d$$

$$R(\cancel{y}) \vdash \forall y R(x) \Rightarrow R(y) \quad \forall d$$

$$R(y) \vdash \exists x \forall y R(x) \Rightarrow R(y) \quad \exists\ \text{droit } [x/x]$$

$$\forall z R(z) \vdash \exists x \forall y R(x) \Rightarrow R(y) \quad \forall g$$

$$R(z) \vdash R(z) \quad \text{ax}$$

$$R(z) \vdash R(z), R(y)$$

$$\neg R(z), R(z) \vdash R(y)$$

$$\neg R(z) \vdash R(z) \Rightarrow R(y) \quad \Rightarrow d$$

$$\neg R(z) \vdash \forall y R(z) \Rightarrow R(y) \quad \forall d$$

$$\neg R(z) \vdash \exists x \forall y R(x) \Rightarrow R(y) \quad \exists d$$

$$\exists z \neg R(z) \vdash \exists x \forall y R(x) \Rightarrow R(y) \quad \exists g$$

$$\forall z R(z) \vee \exists z. \neg R(z) \vdash \exists x \forall y R(x) \Rightarrow R(y) \quad \vee\ \text{gauche}$$

$$\vdash \exists x \forall y R(x) \Rightarrow R(y) \quad \text{coupure}$$

FUN!

C'est le paradoxe des buveurs.

Pour le prouver, on doit distinguer le cas où R est total ($\forall x R(x)$) et celui où on connaît $z \notin R$.